ÉNONCÉ

Pour E k-ev de dim finie d $e=(e_1 \dots e_d)$ base de E.

$N_e : x = \sum^d x_i e_i \in E \mapsto N_e(x) = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ norme sur E.

1. Dans un evn de dim finie, ts les normes sont équiv.

2. si $(E, \|\cdot\|)$ evn de dimension finie, les fermés bornés de $(E, \|\cdot\|)$ sont compacts.

3. Th. Reisz : $(F, \|\cdot\|)$ k-evn. $\dim(F) < +\infty \Leftrightarrow \bar{B}(0,1)$ compacte.

LEÇONS.

203

206

208

RÉFS

1. [G] Gourdon analyse p. 50.

2.3. PAS DE RÉF !

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. th. de la borne atteinte

2. les compacts de $(k^d, |\cdot|_\infty)$ sont les fermés bornés.

DÉMO

: à l'oral.
: écrit au tableau.
: pour comprendre.

PLAN : ① équiv. des normes
② compact ⇔ fermé + borné] en dim finie.
③ $(F, \|\cdot\|)$ evn. $\dim(F) < +\infty \Leftrightarrow B := \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ compacte.

TH : les compacts de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ sont les fermés bornés. on va s'y ramener.

NOT (2 ner).

E $\mathbb{K}$-ev de dim finie d, $e = (e_1 .. e_d)$ base de E,

$N_e : \sum_{i}^{d} x_i e_i \in E \longrightarrow \sup_{1 \le i \le d} |x_i|$ norme sur E (on peut vérifier que)

Norme assez naturelle, on use vraiment dim finie pr la construct.

① Soit $\|\cdot\|$ norme de E.

On veut mq les normes sont équiv, on va mq elles sont tt équiv à N_e et la transitivité de ~ permettra de conc.

BUT : Mq $\|\cdot\| \sim N_e$

Stratégie : utiliser le th de la borne atteinte pr $\|\cdot\|$.

Mq $\|\cdot\|$ continue sur (E, N_e) : mq lipschitz.

$. \big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x-y\| \le \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| \, \|e_i\| \le \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \|e_i\|}_{L > 0} \, N_e(x-y)$

≤ triangulaire inverse. ≤ triang + homogénéité. par déf : c'est fait pour !

Donc $\|\cdot\|$ lipschitzienne donc continue.

Pour le th. de la borne atteinte, il faut aussi un compact :

Soit $S = \{x \in E,\ N_e(x) = 1\}$

Mq S compacte :

$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty) \longrightarrow (E, N_e) \\ (x_1, .. x_d) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{cases}$ est une isométrie. (donc continue) permet transférer prop de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

$S = \varphi(\underbrace{\{x \in \mathbb{K}^n,\ |x|_\infty = 1\}}_{\text{compact.}})$ car fermé borné ds $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

Donc S est compacte dans (E, N_e)

Bornes atteintes :

$\|\cdot\|$ est continue sur S donc y atteint ses bornes :

$\exists\, a, b \in S$ tels que $\quad \|a\| \leq \|x\| \leq \|b\| \quad \forall x \in S$.

Posons $\alpha := \|a\|$; $\beta := \|b\|$, $\alpha, \beta > 0$ (car si $\|a\| = 0$, $a = 0$ et pas psb car $N(a) = 1$)

Et $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{x}{N(x)} \in S$ donc $\alpha \leq \left\| \dfrac{x}{N(x)} \right\| \leq \beta$ ie $\alpha N(x) \leq \|x\| \leq \beta N(x)$.

homogénéité : on peut tjrs se ramener à la boule unité

Finalement : $N \sim \|\cdot\|$ et par transitivité de $\sim$ on a le résultat.

2

On sait que c'est vrai pr $\mathbb{K}^d$, on s'y ramène en passant par N.

Soit K fermé borné dans $(E, \|\cdot\|)$. Il l'est encore dans (E, N) car $N \sim \|\cdot\|$

- Fermeture conservée car par caract séq si CV pr $\|\cdot\|$, CV pr N.
- Caractère borné conservé car $\|\cdot\| \sim \Rightarrow$ inclusion de boules.

Soit $K' := \varphi^{-1}(K) \subset (\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

K' est fermé borné car φ isométrique. donc compact dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

Im réci fonct conti $\qquad \varphi$ conserve les dist.

car φ est continue. $\qquad$ caract via BW et $N \sim$ donc CV l'1 $\Rightarrow$ CV l'autre

Donc $K = \varphi(K')$ est compact dans (E, N) donc dans $(E, \|\cdot\|)$ (th. BW)

vrai car φ injective car isom.

3. $\Rightarrow$ B compacte car fermée bornée 2.

$\Leftarrow$ Sq B compacte.

$B \subset \bigcup_{x \in B} B(x, \frac{1}{2})$

prop de BL.

Donc par compacité, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_1 \dots x_n$, $B = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2})$.

Soit $V := \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n) = \overline{\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)}$ car fermé $\subset$ ss ev de dim finie d'1 ev.

BUT : mq $F = V$ en particulier, fini. suffit mq F DENSE dans E.

Soit $x \in F \setminus \{0\}$ ($0 \in F$ donc pas intéressant)

Quitte à $\div$ x par sa norme, opsq $x \in B$.

On va construire par récu 1 suite de F qui $\to x$.

$i \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}(i)$: " $\exists y_i \in V$, $\|x - y_i\| \leq 2^{-i}$ "

(I) $y_0 = 0$.

(H) Supposons $\mathcal{H}(i)$ vraie

On a : $\|x - y_i\| \leq \frac{1}{2^i}$ donc $\|2^i x - 2^i y\| \leq 1$ (homogénéité)

Donc $2^i x - 2^i y_i \in B = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2})$

Donc $\exists j \in \{1..n\}$, $\|2^i x - 2^i y_i - x_j\| \leq \frac{1}{2}$

Ainsi, $\|x - \underbrace{y_i - 2^{-i} x_j}_{y_{i+1}}\| \leq \frac{1}{2^{i+1}}$

$\mathcal{H}(i+1)$ vraie.

On a construit $(y_i)_i \in F^{\mathbb{N}}$ $y_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ car $\frac{1}{2^i} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$.

Donc $V = F$ de dim finie.